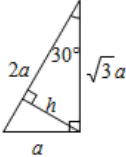
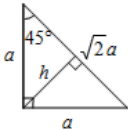
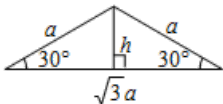
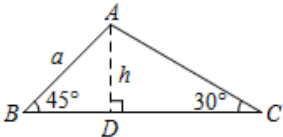
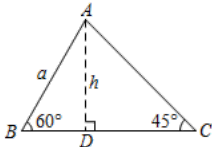
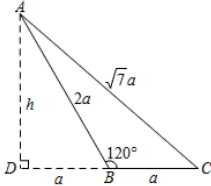
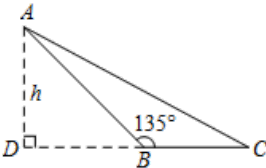
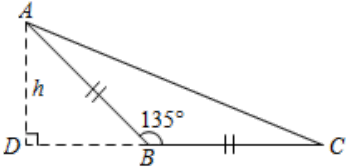
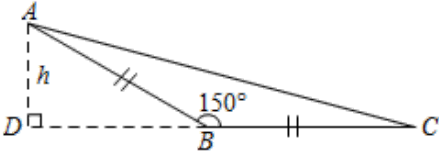


## 第2讲 勾股定理综合应用

### 一、含特殊角的三角形

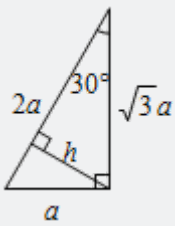
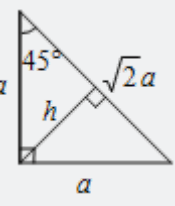
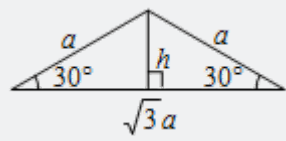
| 特殊三角形                                                                             | 三边比 | 面积 | 最长边的高 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|----|-------|
|  |     |    |       |
|  |     |    |       |
|  |     |    |       |

#### 构造特殊直角三角形

|                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>已知 <math>AB=a</math> , 则 <math>BD=AD=</math> _____ ,<br/> <math>CD=</math> _____ , <math>AC=</math> _____ , <math>BC=</math> _____ .</p>                                        |  <p>已知 <math>AB=a</math> , 则 <math>BD=</math> _____ , <math>AD=CD=</math> _____ ,<br/> <math>AC=</math> _____ , <math>BC=</math> _____ .</p>                                                 |
|  <p>已知 <math>AB=2a</math> , <math>BC=a</math> , <math>\angle ABC = 120^\circ</math> , 构造 <math>Rt\triangle ADB</math> , 解 <math>Rt\triangle ADC</math> , <math>AC=</math> _____</p> |  <p>已知 <math>AB = \sqrt{2}a</math> , <math>BC=a</math> , <math>\angle ABC = 135^\circ</math> , 构造 <math>Rt\triangle ADB</math> , 解 <math>Rt\triangle ADC</math> , <math>AC=</math> _____</p> |
|  <p>已知 <math>AB = BC = a</math> , <math>\angle ABC = 135^\circ</math> , 构造 <math>Rt\triangle ADB</math> , 解 <math>Rt\triangle ADC</math> , <math>AC=</math> _____ .</p>             |  <p>已知 <math>AB = BC = a</math> , <math>\angle ABC = 150^\circ</math> , 构造 <math>Rt\triangle ADB</math> , 解 <math>Rt\triangle ADC</math> , <math>AC=</math> _____ .</p>                      |

【教法备注】

(1) 含有特殊角的三角形三边比例关系：

| 特殊三角形                                                                             | 三边比                | 面积                           | 最长边的高                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------------|----------------------------|
|  | $1 : \sqrt{3} : 2$ | $S = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ | $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ |
|  | $1 : 1 : \sqrt{2}$ | $S = \frac{1}{2} a^2$        | $h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ |
|  | $1 : 1 : \sqrt{3}$ | $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ | $h = \frac{1}{2} a$        |

注意：

$30^\circ$ 所对的直角边是斜边的一半，是在初二上学期等边三角形这部分涉及到的知识点，学生有遗忘可以进行复习，

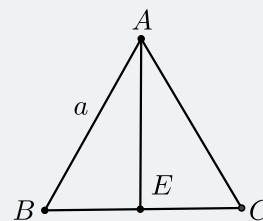
证明：

如图，边长为 $a$ 的等边三角形 $ABC$ 中， $AE \perp BC$ ，

$\therefore E$ 为 $BC$ 的中点，

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB.$$

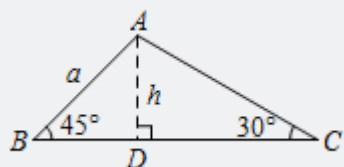


补充：

在不破坏原有特殊角度的情况下：

见到 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 的时候，我们常常往三角形内部作垂直构造直角三角形

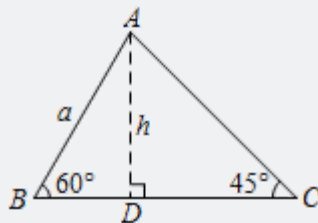
见到 $120^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $150^\circ$ 的时候，我们常常往三角形外部（邻补角）作垂直构造直角三角形



已知  $AB = a$ ,

则  $BD = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,  $CD = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ ,

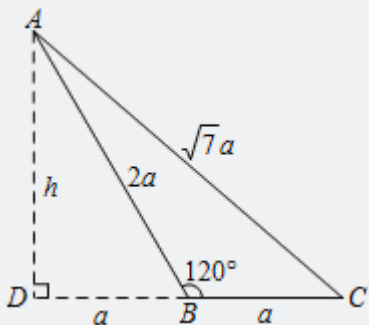
$AC = \sqrt{2}a$ ,  $BC = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}a$ .



已知  $AB = a$ , 则  $BD = \frac{1}{2}a$ ,

$AD = CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,

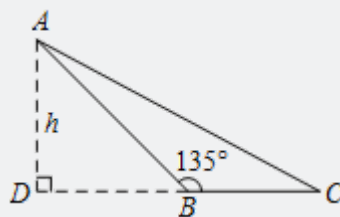
$AC = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ ,  $BC = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}a$ .



已知  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,

构造  $\text{Rt}\triangle ADB$ , 解  $\text{Rt}\triangle ADC$ ,

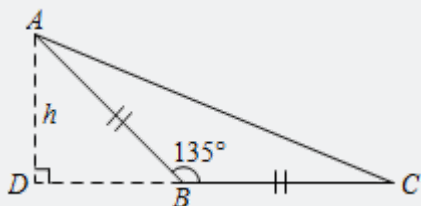
$AC = \sqrt{7}a$ .



已知  $AB = \sqrt{2}a$ ,  $BC = a$ ,  $\angle ABC = 135^\circ$ ,

构造  $\text{Rt}\triangle ADB$ , 解  $\text{Rt}\triangle ADC$ ,

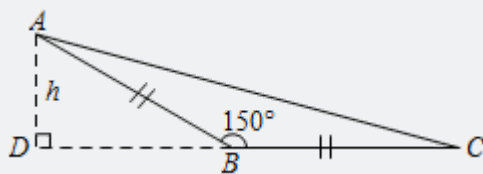
$AC = \sqrt{5}a$ .



已知  $AB = BC = a$ ,  $\angle ABC = 135^\circ$ ,

构造  $\text{Rt}\triangle ADB$ , 解  $\text{Rt}\triangle ADC$ ,

$AC = \sqrt{(2 + \sqrt{2})}a$ .



已知  $AB = BC = a$ ,  $\angle ABC = 150^\circ$ ,

构造  $\text{Rt}\triangle ADB$ , 解  $\text{Rt}\triangle ADC$ ,

$AC = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}a$ .

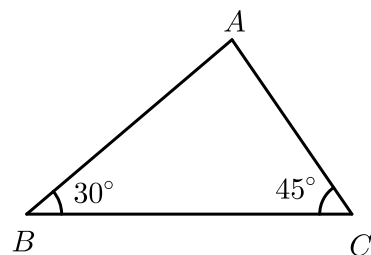
注意：

① 利用勾股定理求线段长的前提条件是在直角三角形中，如果没有直角三角形为条件往往要添加辅助线构造直角三角形。

② 作垂线构造直角三角形是解决这类题的关键。

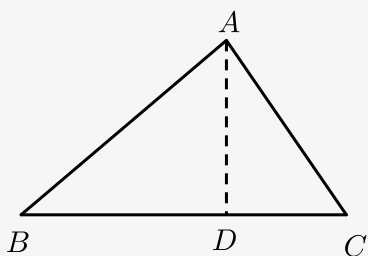
## || 例题

1. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $BC = \sqrt{3} + 1$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ , 求  $\triangle ABC$  的面积。



【答案】  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  .

【解析】 作  $AD \perp BC$  于  $D$  , 如图 ,



设  $AD = x$  ,

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中 ,  $\because \angle B = 30^\circ$  ,

$$\therefore BD = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}x ,$$

在  $\text{Rt}\triangle ADC$  中 ,  $\because \angle C = 45^\circ$  ,

$$\therefore CD = AD = x ,$$

而  $BD + CD = BC$  ,

$$\therefore \sqrt{3}x + x = \sqrt{3} + 1 , \text{ 解得 } x = 1 ,$$

即  $AD = 1$  ,

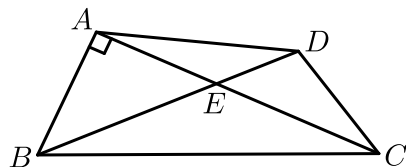
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 1 \times (\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} .$$

【标注】 【知识点】 解直角三角形的综合应用

【教法备注】

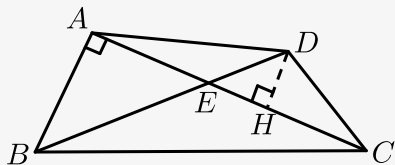
2017~2018学年3月天津和平区天津市双菱中学初二下学期月考第24题

2. 如图 , 在四边形  $ABCD$  中 , 对角线  $AC$  ,  $BD$  交于点  $E$  ,  $\angle BAC = 90^\circ$  ,  $\angle CED = 45^\circ$  ,  $\angle DCE = 30^\circ$  ,  $DE = \sqrt{2}$  ,  $BE = 2\sqrt{2}$  . 求  $AC$  的长和四边形  $ABCD$  的面积 .



**【答案】**  $3 + \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3} + 9}{2}$

**【解析】** 过点 $D$ 作 $DH \perp AC$ ,



$$\because \angle CED = 45^\circ, DH \perp EC, DE = \sqrt{2},$$

$$\therefore EH = DH,$$

$$\because EH^2 + DH^2 = ED^2,$$

$$\therefore EH^2 = 1,$$

$$\therefore EH = DH = 1,$$

$$\text{又} \because \angle DCE = 30^\circ,$$

$$\therefore DC = 2, HC = \sqrt{3},$$

$$\because \angle AEB = 45^\circ, \angle BAC = 90^\circ, BE = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = AE = 2,$$

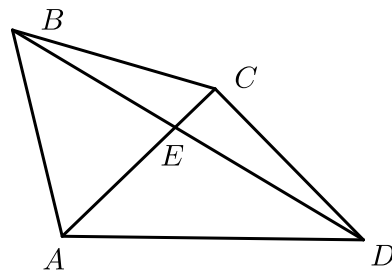
$$\therefore AC = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times (3 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \times 1 \times (3 + \sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3} + 9}{2}.$$

**【标注】**【知识点】勾股定理的综合应用

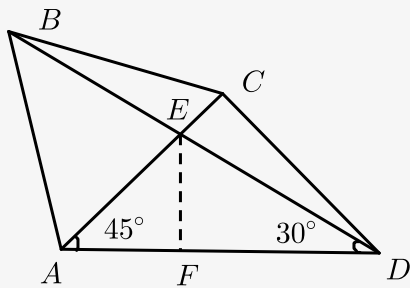
### 练习

3. 如图,  $\triangle ABC$ 是等边三角形,  $\triangle ACD$ 是等腰三角形, 且 $\angle ACD = 90^\circ$ ,  $AD = 2$ , 连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $E$ , 则 $AE$ 的长为 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

**【解析】** 过 $E$ 作 $EF \perp AD$ 于点 $F$ .



$$\therefore CD = CA, CA = CB,$$

$$\therefore CD = CB.$$

$$\text{又} \because \angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ.$$

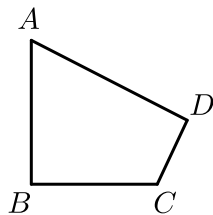
$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } AF = EF, \text{ 设 } AF = x, \text{ 则 } FD = 2 - x, EF = x.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } DF = \sqrt{3}EF, \text{ 即 } 2 - x = \sqrt{3}x, \text{ 解得: } x = \sqrt{3} - 1.$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } AE = \sqrt{2}AF = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

**【标注】**【知识点】方程思想在勾股定理的应用

4. 如图, 已知  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $CD = 2$ . 求四边形  $ABCD$  的面积.



**【答案】**  $S_{\text{四边形}ABCD} = 6\sqrt{3}.$

**【解析】** 延长  $AD$ 、 $BC$  相交于点  $E$ .

$$\because \angle A = 60^\circ, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 30^\circ.$$

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  和  $\text{Rt}\triangle CDE$  中,

$$\because CD = 2, AB = 4,$$

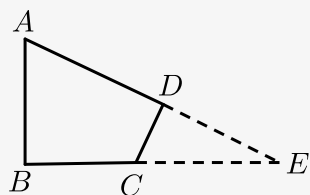
$$\therefore AE = 2AB = 8, CE = 2CD = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } BE^2 = AE^2 - AB^2 = 8^2 - 4^2 = 48.$$

$$\therefore BE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

$$DE = \sqrt{CE^2 - DC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AB \cdot BE - \frac{1}{2}DC \cdot DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

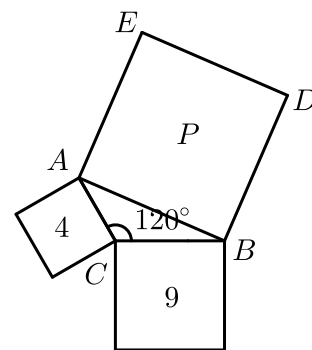


【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

【能力】分析和解决问题能力

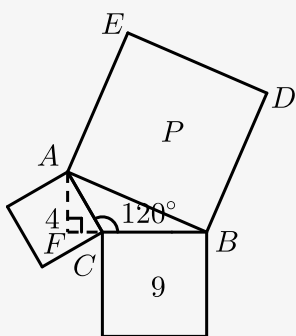
## 例题

5. 如图，图中数字代表正方形的面积， $\angle ACB = 120^\circ$ ，则正方形  $P$  的面积为 \_\_\_\_\_ .



【答案】19

【解析】如图，过  $A$  作  $AD \perp BC$ ，交  $BC$  于  $F$ ，



$$\because \angle ACB = 120^\circ$$

$$\therefore \angle ACF = 60^\circ$$

$$\because AF \perp BC,$$

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ, \angle FAC = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{4} = 2, BC = \sqrt{9} = 3,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AC = 1,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AFB$ 中,  $BF = BC + CF = 4$ ,  $AF = \sqrt{3}$

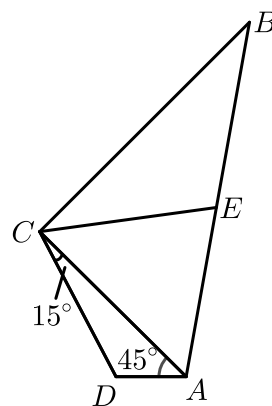
$$\therefore AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = 19,$$

$\therefore$ 正方形面积为19.

**【标注】**【知识点】勾股定理的综合应用

## 练习

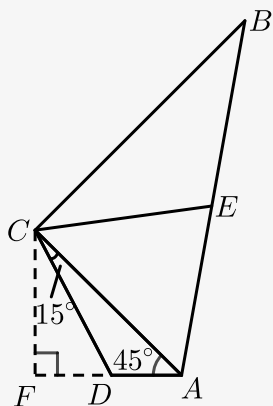
6. 已知四边形 $ABCD$ 中,  $AB = 10$ ,  $BC = 8$ ,  $CD = 2\sqrt{6}$ ,  $\angle DAC = 45^\circ$ ,  $\angle DCA = 15^\circ$ .



(1) 求 $\triangle ADC$ 的面积.

**【答案】** (1)  $9 - 3\sqrt{3}$ .

**【解析】** (1) 过点 $C$ 作 $CF \perp AD$ , 交 $AD$ 的延长线于点 $F$ ,



$$\because \angle DAC = 45^\circ, \angle DCA = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle DAC + \angle DCA,$$

$$= 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ.$$

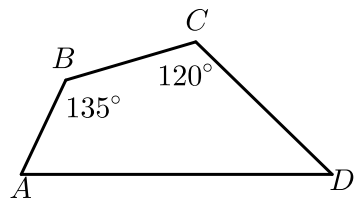
$$\text{在Rt}\triangle CFD\text{中}, CD = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}CD = \sqrt{6},$$

$$\begin{aligned}
 CF &= \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}, \\
 \therefore AD &= AF - DF = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}, \\
 \therefore S_{\triangle ADC} &= \frac{1}{2} AD \times CF \\
 &= \frac{1}{2} \times (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \times 3\sqrt{2} \\
 &= 9 - 3\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

7. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 135^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ， $AB = \sqrt{6}$ ， $BC = 5 - \sqrt{3}$ ， $CD = 6$ ，求 $AD$ 的长。

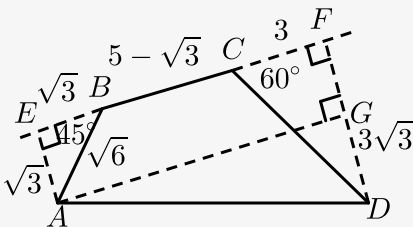


【答案】 $2\sqrt{19}$ 。

【解析】如图添加辅助线，可求得 $AG = 8$ ， $DG = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore AD = \sqrt{AG^2 + DG^2} = 2\sqrt{19}.$$

故答案为： $2\sqrt{19}$ 。



【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

【教法备注】

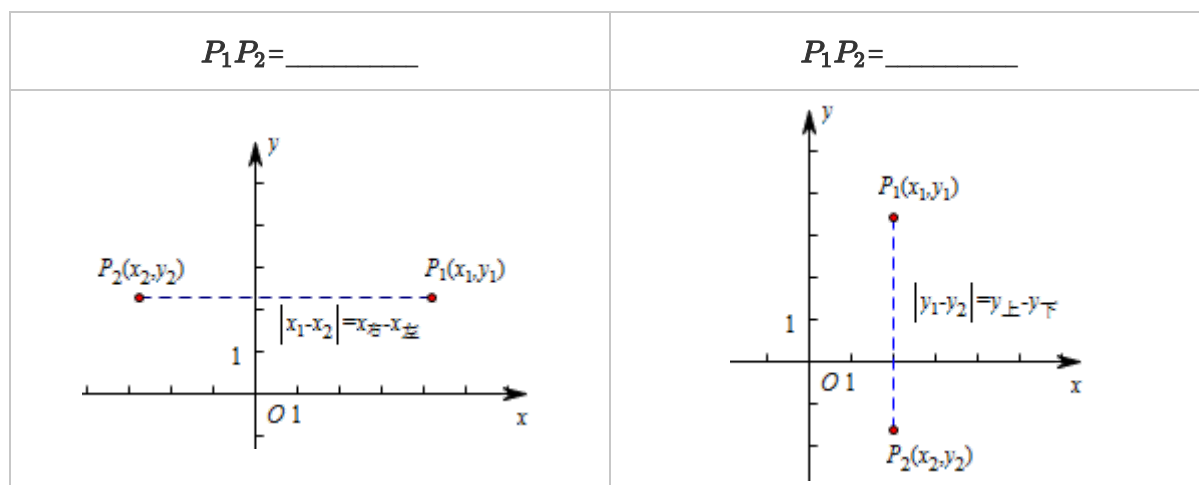
2018~2019学年3月天津和平区天津市益中学校初二下学期月考第22题6分

## 二、两点间距离公式



复习回顾

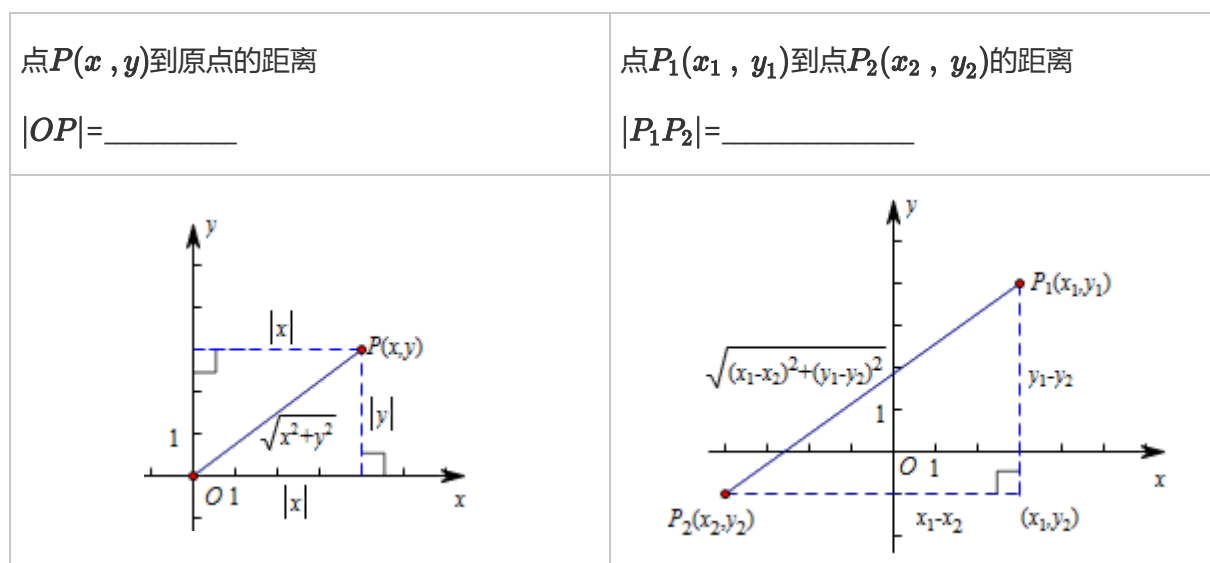
平行于 $x$ 轴或 $y$ 轴的两点 $P_1$ 、 $P_2$ ，那么这两点间距离为：



思考：

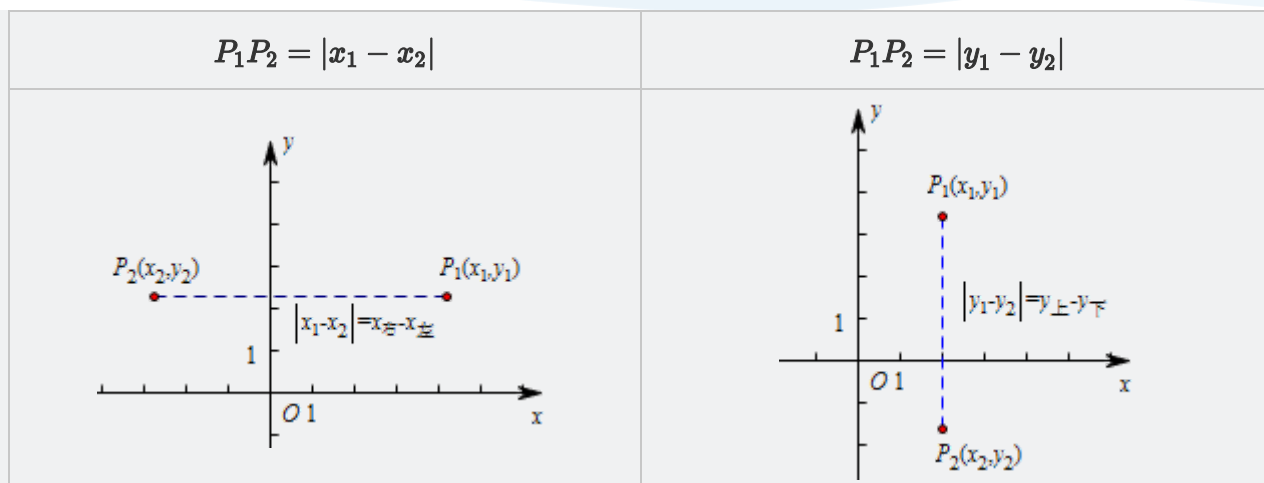
如果这两点 $P_1$ 、 $P_2$ 不平行与 $x$ 轴或 $y$ 轴，那这两点间的距离还可求吗？

## 🧠 两点间距离公式



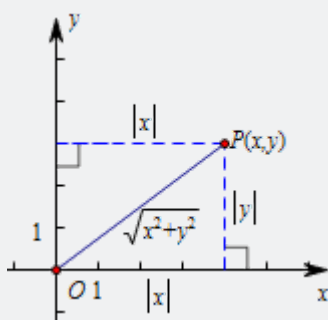
### 【教法备注】

(1) 平行于 $x$ 轴或 $y$ 轴的两点 $P_1$ 、 $P_2$ ，那么这两点间距离为：

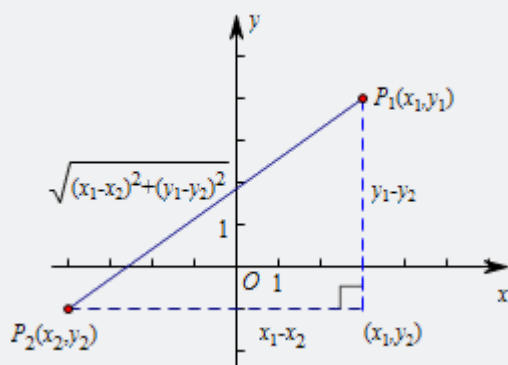


(2) 任意两点间距离：

①点 $P(x, y)$ 到原点的距离是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ ；



②点 $P_1(x_1, y_1)$ 到点 $P_2(x_2, y_2)$ 的距离 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ，



**方法总结：**

在平面直角坐标系中需要计算线段长度时，通常作 $x$ 轴或 $y$ 轴的平行线（或垂线），目的是实现坐标与线段长度之间的相互转换。

### || 例题

8. 在平面直角坐标系中，点 $P(-3, 2)$ 到原点的距离为 \_\_\_\_\_。

**【答案】**  $\sqrt{13}$

**【解析】**  $P$ 到原点的距离  $= \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ 。

【标注】【知识点】坐标与距离

【能力】运算能力

【教法备注】

2018~2019学年3月天津河西区天津市培杰中学初二下学期月考第13题3分

9. 在平面直角坐标系中，点 $(0, 1)$ 与 $(3, 2)$ 之间的距离为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】点 $(0, 1)$ 与 $(3, 2)$ 之间的距离为 $d = \sqrt{(0 - 3)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{10}$  .

【标注】【知识点】两点间的距离公式

### 练习

10. 在平面直角坐标系中，点 $A(-1, 2)$ 与点 $B(-3, -2)$ 的距离是 ( ) .

A.  $\sqrt{5}$

B.  $2\sqrt{5}$

C.  $3\sqrt{5}$

D.  $4\sqrt{5}$

【答案】B

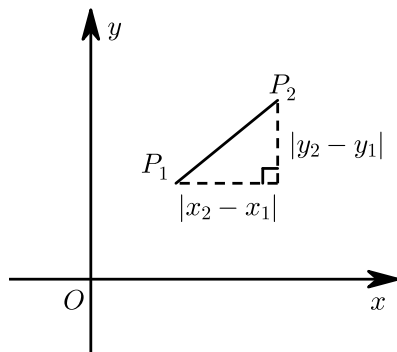
【解析】 $AB = \sqrt{(-1 + 3)^2 + (2 + 2)^2} = 2\sqrt{5}$  .

【标注】【知识点】两点间的距离公式

11. 阅读下列材料，然后回答下列问题 .

如图，已知在平面内的两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ ，其两点间的距离可利用勾股定理求得：

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} .$$



( 1 ) 已知 $A(2, 4)$ 、 $B(-3, -8)$ ，试求 $A$ 、 $B$ 两点间的距离 .

( 2 )

已知一个三角形各顶点坐标为 $D(1, 3)$ 、 $E(5, 1)$ 、 $F(2, 5)$ ，你能判定此三角形的形状吗？说明理由．

**【答案】** (1)  $AB = 13$  .

(2)  $\triangle DEF$ 为直角三角形 .

**【解析】** (1)  $AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (-8-4)^2} = 13$  .

(2)  $DE = \sqrt{(1-5)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$  ,

$DF = \sqrt{(1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{5}$  ,

$EF = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2} = 5$  ,

$\therefore DE^2 + DF^2 = EF^2$  ,

$\therefore \triangle DEF$ 为直角三角形 .

**【标注】**【能力】运算能力

【知识点】勾股定理的逆定理

【知识点】勾股逆定理的应用

【知识点】坐标与距离

## 例题

12. 请阅读下列材料：

问题：如图1，点 $A$ 、 $B$ 在直线 $l$ 的同侧，在直线 $l$ 上找一点 $P$ ，使得 $AP + BP$ 的值最小.

小明的思路是：如图2所示，先做点 $A$ 关于直线 $l$ 的对称点 $A'$ ，使点 $A'$ 、 $B$ 分别位于直线 $l$ 的两侧，再连接 $A'B$ ，根据“两点之间线段最短”可知 $A'B$ 与直线 $l$ 的交点 $P$ 即为所求 .

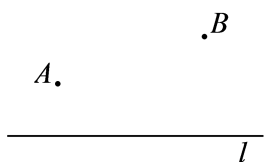


图1

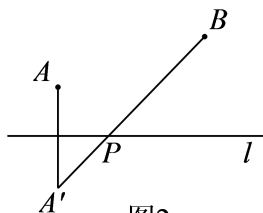


图2

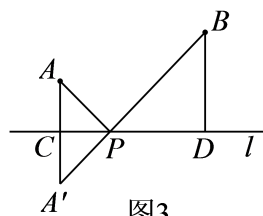


图3

请你参考小明同学的思路，探究并解决下列问题：

(1) 如图3，在图2的基础上，设 $AA'$ 与直线 $l$ 的交点为 $C$ ，过点 $B$ 作 $BD \perp l$ ，垂足为 $D$  . 若 $CP = 1$ ， $AC = 1$ ， $PD = 2$ ，直接写出 $AP + BP$ 的值 .

(2) 将(1)中的条件“ $AC = 1$ ”去掉，换成“ $BD = 4 - AC$ ”，其它条件不变，直接写出此时 $AP + BP$ 的值 .

(3) 请结合图形，求 $\sqrt{(m-3)^2 + 1} + \sqrt{(9-m)^2 + 4}$ 的最小值 .

【答案】(1)  $3\sqrt{2}$ .

(2) 5.

(3) 最小值为  $3\sqrt{5}$ .

【解析】(1) 由题意可知,  $\triangle ACP$  和  $\triangle BDP$  是等腰直角三角形,

$$\therefore AP = \sqrt{2}, BP = 2\sqrt{2},$$

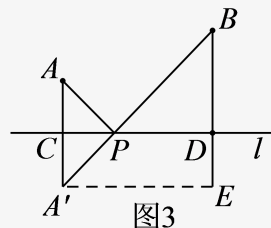
$$\therefore AP + BP = 3\sqrt{2}.$$

(2) 如图, 过点  $A'$  作  $BD$  垂线于点  $E$ ,

可知四边形  $A'EDC$  是矩形,

$$\therefore A'C = AC = 1, BE = BD + A'C = 4, A'E = 3,$$

$$\therefore AP + BP = \sqrt{BE^2 + A'E^2} = 5.$$



(3) 设  $AC = 1, CP = m - 3$ ,

$\because AA' \perp l$  于点  $C$ ,

$$\therefore AP = \sqrt{(m-3)^2 + 1},$$

设  $BD = 2, DP = 9 - m$ ,

$\because BD \perp l$  于点  $D$ ,

$$\therefore BP = \sqrt{(9-m)^2 + 4},$$

$\therefore \sqrt{(m-3)^2 + 1} + \sqrt{(9-m)^2 + 4}$  的最小值即为  $A'B$  的长.

即  $A'B = \sqrt{(m-3)^2 + 1} + \sqrt{(9-m)^2 + 4}$  的最小值.

如图, 过  $A'$  作  $A'E \perp BD$  的延长线于点  $E$ ,

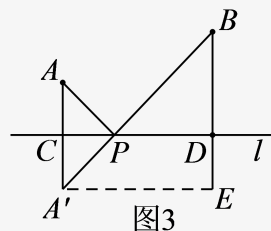
$$\therefore A'E = CD = CP + PD = m - 3 + 9 - m = 6,$$

$$BE = BD + DE = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore A'B = \sqrt{(m-3)^2 + 1} + \sqrt{(9-m)^2 + 4} \text{ 的最小值}$$

$$= \sqrt{BE^2 + A'E^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \sqrt{(m-3)^2 + 1} + \sqrt{(9-m)^2 + 4} \text{ 的最小值为 } 3\sqrt{5}.$$



【标注】【知识点】矩形的性质

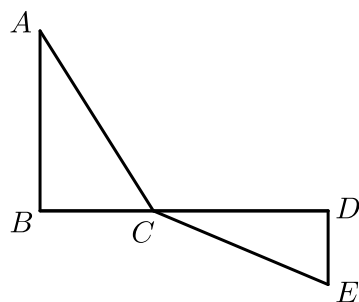
【知识点】等腰直角三角形的性质

【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】勾股定理与实际问题

【能力】分析和解决问题能力

13. 如图,  $C$  为线段  $BD$  上一动点, 分别过点  $B$ 、 $D$  作  $AB \perp BD$ ,  $ED \perp BD$ , 连接  $AC$ 、 $EC$ .



(1) 若  $AB = 5$ ,  $DE = 1$ ,  $BD = 8$ , 设  $CD = x$ .

① 当  $AC = CE$  时, 求  $x$  的值.

② 求  $AC + CE$  的最小值.

(2) 结合 (1) 中的规律的结论, 请构造图形, 并求出代数式  $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(12 - x)^2 + 9}$  的最小值.

**【答案】** (1) ①  $x = 5.5$ .

②  $AC + CE$  的最小值为 10.

(2) 13.

**【解析】** (1) ①  $\because AB \perp BD$ ,  $ED \perp BD$ ,

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2, CE^2 = DE^2 + CD^2,$$

$$\because AC = CE,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = DE^2 + CD^2,$$

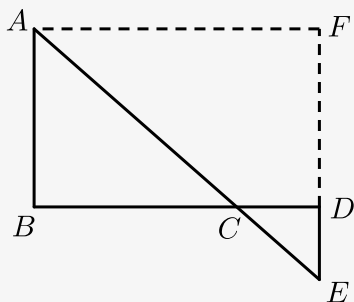
$$\because BD = 8, CD = x, \text{ 则 } BC = 8 - x,$$

$$\therefore 5^2 + (8 - x)^2 = 1^2 + x^2,$$

$$\text{解得: } x = 5.5.$$

② 当点  $C$  是  $AE$  和  $BD$  交点时,  $AC + CE$  的值最小,

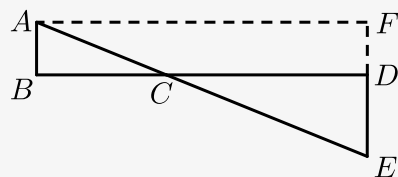
过点  $A$  作  $AF \parallel BD$  交  $ED$  的延长线于点  $F$ ,



得矩形  $ABDF$ , 则:

$$\begin{aligned}
 AB &= DF = 5, AF = BD = 8, \\
 EF &= ED + DF = 1 + 5 = 6, \\
 \therefore AE &= \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \\
 \therefore AC + CE &\text{的最小值为} 10.
 \end{aligned}$$

(2) 如图所示, 作  $BD = 12$ , 过点  $B$  作  $AB \perp BD$ ,



过  $D$  点作  $DE \perp BD$ , 使  $AB = 2$ ,  $DE = 3$ ,

连接  $AE$  交  $BD$  于点  $C$ , 设  $BC = x$ ,

则  $AE$  的长即为代数式  $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(12 - x)^2 + 9}$  的最小值.

过点  $A$  作  $AF \parallel BD$  交  $ED$  的延长线于点  $F$ , 得矩形  $ABDF$ , 则:

$$AB = DF = 2, AF = BD = 12, EF = ED + DF = 3 + 2 = 5,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

$$\therefore \text{代数式 } \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(12 - x)^2 + 9} \text{ 的最小值为 } 13.$$

【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

### 三、勾股定理与将军饮马

#### 将军饮马常见模型

| $PA + PB$ 最小 | $\triangle APQ$ 周长最小 | $PA + PB$ 最小 |
|--------------|----------------------|--------------|
|              |                      |              |

#### 【教法备注】

将军饮马常见模型:

| $PA + PB$ 最小 | $\triangle APQ$ 周长最小 | $PA + PB$ 最小 |
|--------------|----------------------|--------------|
|              |                      |              |

**技巧点拨：**

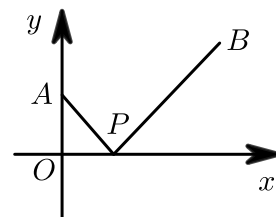
求将军饮马的最短路程，

①先找到最短路径，

②再构造直角三角形（作垂直）——用勾股定理求长度

### || 例题

14. 如图， $A(0, 1)$ ， $B(3, 2)$ ，点 $P$ 为 $x$ 轴上任意一点，则 $PA + PB$ 的最小值为（ ）。



A. 3

B.  $3\sqrt{2}$

C.  $2\sqrt{10}$

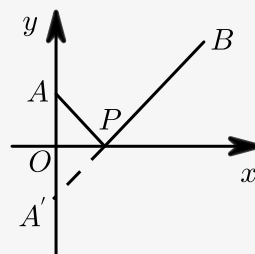
D.  $\sqrt{10}$

**【答案】** B

**【解析】** 作点 $A$ 关于 $x$ 轴的对称点 $A'$ ，连接 $BA'$ 交 $x$ 轴于点 $P$ ，此时 $PA + PB$ 的值最小。

$$PA + PB \text{ 的最小值} = BA' = \sqrt{(3-0)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}.$$

故选：B。

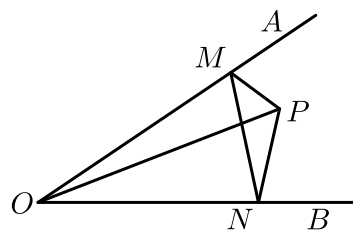


**【标注】** 【能力】 运算能力

【知识点】 轴对称的定义

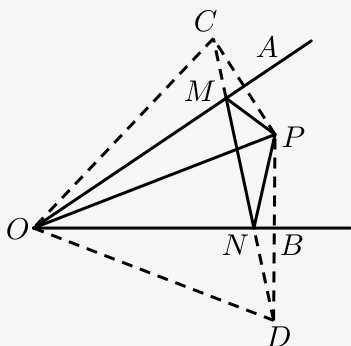
15.

如图，已知 $\angle AOB = 45^\circ$ ， $\angle AOB$ 内有一点 $P$ ， $OP = 6\sqrt{2}$ ， $M$ 为射线 $OA$ 上一动点， $N$ 为射线 $OB$ 上一动点，则 $PM + MN + PN$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ 。



**【答案】** 12

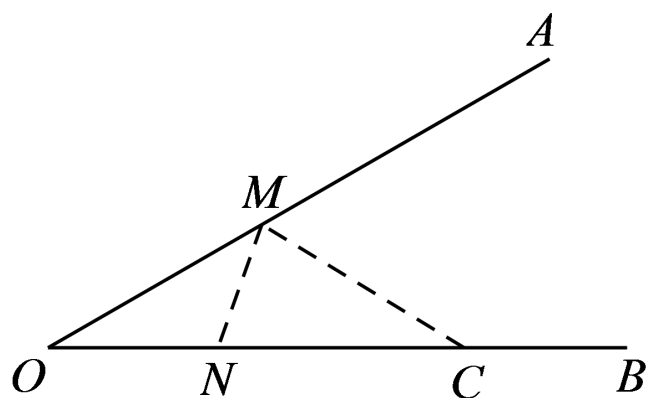
**【解析】** 如图所示：分别作点 $P$ 关于 $OA$ 、 $OB$ 的对称点 $C$ 、 $D$ ，连接 $CD$ ，分别交 $OA$ 、 $OB$ 于点 $M$ 、 $N$ ，连接 $OC$ 、 $OD$ 、 $PM$ 、 $PN$ 、 $MN$ ，



$\because$  点 $P$ 关于 $OA$ 的对称点为 $C$ ，关于 $OB$ 的对称点为 $D$ ，  
 $\therefore PM = CM$ ， $OP = OC$ ， $\angle COA = \angle POA$ ，  
 $\because$  点 $P$ 关于 $OB$ 的对称点为 $D$ ，  
 $\therefore PN = DN$ ， $OP = OD$ ， $\angle DOB = \angle POB$ ，  
 $\therefore OC = OD = OP = 6\sqrt{2}$ ， $\angle COD = 2\angle AOB = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ ，  
 $\therefore CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 12$ ，  
 $\therefore PM + MN + PN$ 的最小值是12。

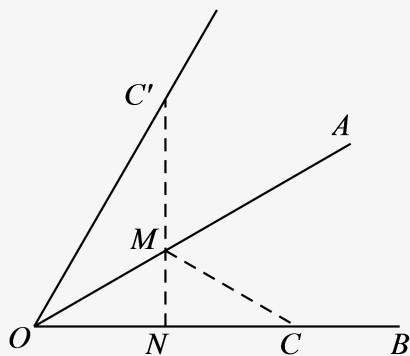
**【标注】**【知识点】三角形-内角角分线

16. 如图， $\angle AOB = 30^\circ$ ， $OC = 2$ ，在 $OA$ 上找一点 $M$ ，在 $OB$ 上找一点 $N$ ，使得 $CM + MN$ 最小，则此最小值为 \_\_\_\_\_ 。



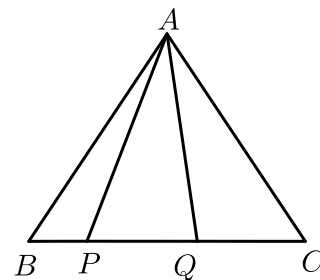
【答案】  $\sqrt{3}$

【解析】 如图所示，作点C关于OA的对称点C'，易得  $CM + MN \geq \sqrt{3}$  .



【标注】 【知识点】 线段和的最小值

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，动点P，Q在边BC上(P在Q的左边)，且  $PQ = 2$ ，则  $AP + AQ$  的最小值为 ( ) .



A. 8

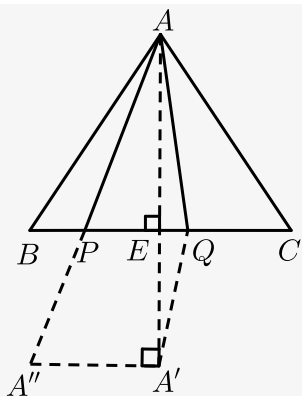
B.  $2\sqrt{13}$

C. 9

D.  $2\sqrt{17}$

【答案】 D

【解析】



过点 $A$ 做关于 $BC$ 的对称点 $A'$ ，将 $A'$ 向左平移2个单位，至 $A''$ ，连接 $AA''$ 交 $BC$ 于点 $P$ ，将点 $P$ 向右平移2个单位至 $Q$ ，此时 $AP + AQ$ 最小，即为 $AA''$ 。

$$\because AB = AC = 5, BC = 6,$$

$$\therefore BE = CE = 3,$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle ABE\text{中}, AE = 4,$$

$$\therefore AA' = 2AE = 8,$$

$$\text{又}\because A'A'' = PQ = 2,$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle AA'A''\text{中},$$

$$AA'' = \sqrt{AA'^2 + A'A''^2}$$

$$= 2\sqrt{17}.$$

$$\therefore AP + AQ\text{的最小值是}2\sqrt{17}.$$

故选D。

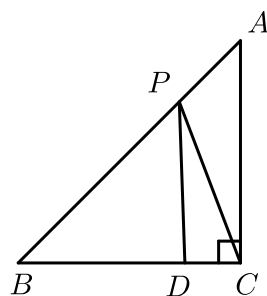
【标注】【知识点】线段和的最小值

【教法备注】

2019年天津红桥区初三三模第11题3分

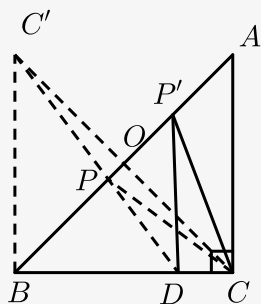
### 练习

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 $D$ 在 $BC$ 上， $BD = 3$ ， $DC = 1$ ，点 $P$ 是 $AB$ 上的动点，则 $PC + PD$ 的最小值为 \_\_\_\_\_。



【答案】 5

【解析】 过点 $C$ 作 $CO \perp AB$ 于 $O$ ，延长 $CO$ 到 $C'$ ，使 $OC' = OC$ ，连接 $DC'$ ，交 $AB$ 于 $P$ ，连接 $CP$ ，



此时 $DP + CP = DP + PC' = DC'$ 的值最小，

$\therefore BD = 3, DC = 1,$

$\therefore BC = 4,$

$\therefore BD = 3,$

连接 $BC'$ ，由对称性可知 $\angle C'BA = \angle CBA = 45^\circ,$

$\therefore \angle CBC' = 90^\circ,$

$\therefore BC' \perp BC, \angle BCC' = \angle BC'C = 45^\circ,$

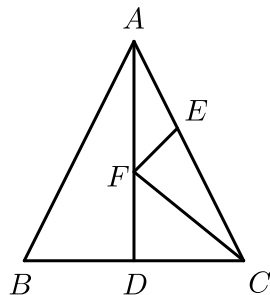
$\therefore BC = BC' = 4,$

根据勾股定理可得 $DC' = \sqrt{BC'^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$

故答案为：5.

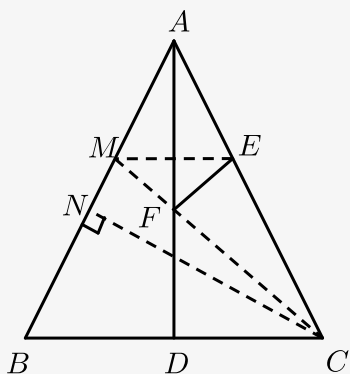
【标注】 【知识点】 勾股定理与最值

19. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 13, BC = 10, AD$ 是 $BC$ 边上的中线， $AD = 12, F$ 是 $AD$ 上的动点， $E$ 是 $AC$ 边上的动点，则 $CF + EF$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $\frac{120}{13}$

【解析】



作 $E$ 关于 $AD$ 的对称点 $M$ ，连接 $CM$ 交 $AD$ 于 $F$ ，连接 $EF$ ，过 $C$ 作 $CN \perp AB$ 于 $N$ ，

$\because AB = AC = 13$ ， $BC = 10$ ， $AD$ 是 $BC$ 边上的中线，

$\therefore BD = DC = 5$ ， $AD \perp BC$ ， $AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore M$ 在 $AB$ 上，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD = 12$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times AB \times CN,$$

$$\therefore CN = \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{10 \times 12}{13} = \frac{120}{13},$$

$\because E$ 是关于 $AD$ 的对称点 $M$ ，

$\therefore EF = FM$ ，

$\therefore CF + EF = CF + FM = CM$ ，

根据垂线段最短得出： $CM \geq CN$ ，

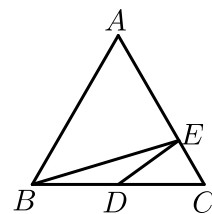
$$\text{即 } CF + EF \geq \frac{120}{13},$$

$$\text{即 } CF + EF \text{ 的最小值是 } \frac{120}{13},$$

故答案为： $\frac{120}{13}$ 。

**【标注】**【知识点】线段和的最小值

20. 如图，已知点 $D$ 是等边三角形 $ABC$ 中 $BC$ 的中点， $BC = 2$ ，点 $E$ 是 $AC$ 边上的动点，则 $BE + ED$ 的和最小值为（ ）。



A.  $\sqrt{5}$

B.  $\sqrt{7}$

C. 3

D.  $\sqrt{3} + 1$

**【答案】** B

【解析】作 $B$ 关于 $AC$ 的对称点 $B'$ ，连接 $BB'$ ， $B'D$ ，交 $AC$ 于 $E$ ，此时

$$BE + ED = B'E + ED = B'D,$$

根据两点之间线段最短可知 $B'D$ 就是 $BE + ED$ 的最小值，

$\therefore B, B'$ 关于 $AC$ 的对称，

$\therefore AC, BB'$ 互相垂直平分，

$\therefore$ 四边形 $ABCB'$ 是平行四边形，

$\therefore$ 三角形 $ABC$ 是边长为2，

$\therefore D$ 为 $BC$ 的中点，

$\therefore AD \perp BC$ ，

$$\therefore AD = \sqrt{3}, BD = CD = 1, BB' = 2AD = 2\sqrt{3},$$

作 $B'G \perp BC$ 的延长线于 $G$ ，

$$\therefore B'G = AD = \sqrt{3},$$

在 $\triangle B'BG$ 中，

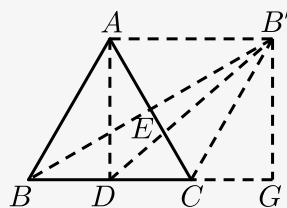
$$BG = \sqrt{BB'^2 - B'G^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3,$$

$$\therefore DG = BG - BD = 3 - 1 = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle B'DG$ 中，

$$B'D = \sqrt{DG^2 + B'G^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

故 $BE + ED$ 的最小值为 $\sqrt{7}$ 。

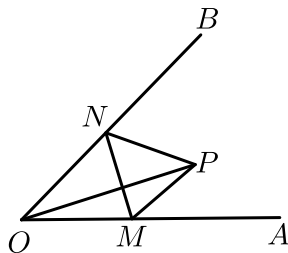


【标注】【知识点】勾股定理与实际问题

【知识点】两点间的距离公式

【知识点】轴对称的性质

21. 如图，已知 $\angle AOB = 45^\circ$ ，点 $P$ 在 $\angle AOB$ 内， $OP = 2014$ ，分别在 $OA, OB$ 上取点 $M, N$ ，则 $C_{\triangle PMN}$ 最小值为\_\_\_\_\_。



【答案】 $2014\sqrt{2}$

【解析】略。

【标注】【知识点】线段和的最小值

22. 如图①，长方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $BC = 10$ ，在边 $CD$ 上取一点 $E$ ，将 $\triangle ADE$ 折叠后点 $D$ 恰好落在 $BC$ 边上的点 $F$ 。

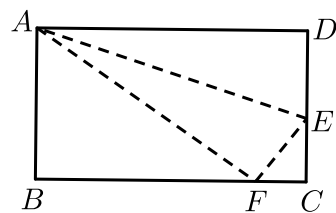


图 ①

- (1) 求 $CE$ 的长。
- (2) 建立平面直角坐标系如图②所示，在 $x$ 轴上找一点 $P$ ，使 $PA + PE$ 的值最小，求出最小值和点 $P$ 的坐标。

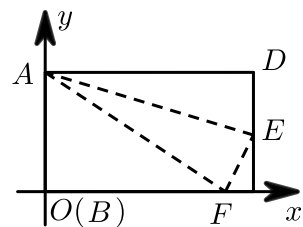


图 ②

【答案】(1) 3.

(2)  $\sqrt{221}$ ;  $P\left(\frac{80}{11}, 0\right)$ .

【解析】(1) 如图①，

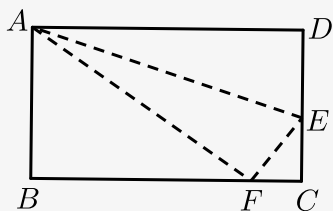


图 ①

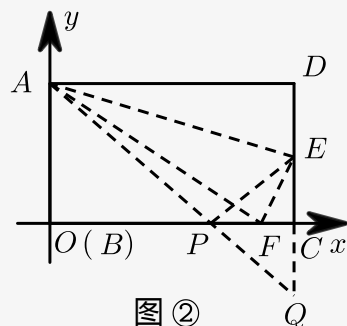
设 $CE = x$ ，  
 则 $DE = EF = 8 - x$ ，  
 $\because AD = AF = 10$ ， $AB = 8$ ，  
 $\therefore BF = 6$ ，  
 $CF = 4$ ，  
 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中，

由  $CE^2 + CF^2 = EF^2$  得  $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$ ,

解得  $x = 3$ ,

即  $CE = 3$ .

(2) 如图②,



图②

作点  $E$  关于  $x$  轴的对称点  $Q$ ,

连接  $AQ$ , 与  $x$  轴的交点即为所求,

则  $CE = CQ = 3$ ,

$\therefore$  点  $Q(10, -3)$ ,

$\therefore DQ = CD + CQ = 11$ ,

$\therefore AQ = \sqrt{AD^2 + DQ^2} = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221}$ ,

由  $A(0, 8)$ ,  $Q(10, -3)$  可得直线  $AQ$  解析式为  $y = -\frac{11}{10}x + 8$ ,

当  $y = 0$  时,  $-\frac{11}{10}x + 8 = 0$ ,

解得:  $x = \frac{80}{11}$ ,

所以点  $P\left(\frac{80}{11}, 0\right)$ , 最小值为  $\sqrt{221}$ .

**【标注】**【知识点】线段和的最小值